

Дроби

Конспект по теме 1.2 (ОГЭ, математика, 9 класс)

13.10.2026

Определения

Теоремы

Примеры

1 Обозначения

Обозначение	Чтение	Значение
$\frac{a}{b}$	« a делить на b »	обыкновенная дробь : b – <i>знаменатель</i> (на сколько частей делили), a – <i>числитель</i> (сколько частей взяли); $b \neq 0$
$a : b$	« a разделить на b »	то же самое, что $\frac{a}{b}$ (черта дроби – знак деления)
a, b	« a целых b десятых»	десятичная запись: запятая отделяет целую часть от дробной
$p\%$	« p процентов»	$\frac{p}{100}$ (сотая доля числа)
$\text{НОД}(a, b)$	«НОД»	наибольший общий делитель (тема 1.1)
$\text{НОК}(a, b)$	«НОК»	наименьшее общее кратное (тема 1.1)

2 Обыкновенная дробь

Определение 2.1: обыкновенная дробь

Разделим целое на b равных частей (долей); одна такая часть – это $\frac{1}{b}$.

Обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$ – это a таких частей. Число b называют **знаменателем** (на сколько частей делили), число a – **числителем** (сколько частей взяли); $b \neq 0$.

Дробь $\frac{a}{b}$ – то же самое, что частное $a : b$: черта дроби заменяет знак деления.

Дробь называют **правильной**, если $a < b$ (она меньше 1), и **неправильной**, если $a \geq b$ (она не меньше 1).

Смешанное число $k\frac{a}{b}$ (здесь $a < b$) означает сумму $k + \frac{a}{b}$.

Замечание

Любую неправильную дробь можно записать смешанным числом и наоборот: $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ («семь четвёртых» – это одна целая и ещё три четверти). Обратно, $1\frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{7}{4}$.

Пример 2.2

Правильная дробь всегда меньше 1, неправильная – не меньше 1. Например:

$\frac{3}{4}$ – правильная (числитель меньше знаменателя);

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \quad - \text{неправильная}; \quad \frac{9}{3} = 3 \quad - \text{целое число}.$$

3 Основное свойство дроби

Теорема 3.1: основное свойство дроби

Числитель и знаменатель можно умножить или разделить на одно и то же натуральное число – значение дроби при этом не изменится:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a : k}{b : k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Доказательство. Дробь $\frac{a}{b}$ – это частное $a : b$. Но a и b можно одновременно увеличить в k раз: $ak : (bk) = a : b$, ведь $(bk) \cdot \frac{a}{b} = ak$. Значит, дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{ak}{bk}$ равны. $\square$

Определение 3.2: сокращение дроби

Сократить дробь – значит разделить числитель и знаменатель на их общий делитель.

Дробь называют **несократимой**, если числитель и знаменатель взаимно просты, то есть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Чтобы сразу получить несократимую дробь, делят на *наибольший* общий делитель $\text{НОД}(a, b)$.

Пример 3.3

Сократим $\frac{18}{24}$. Так как $\text{НОД}(18, 24) = 6$, получаем

$$\frac{18}{24} = \frac{18 : 6}{24 : 6} = \frac{3}{4},$$

и $\frac{3}{4}$ уже несократима (числа 3 и 4 взаимно просты).

Приведение к общему знаменателю

Чтобы сравнить или сложить дроби с разными знаменателями, их приводят к общему знаменателю: умножают числитель и знаменатель каждой дроби на подходящее число. Удобен *наименьший* общий знаменатель – это НОК знаменателей. Например, для $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{8}$ имеем $\text{НОК}(6, 8) = 24$, поэтому

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}, \quad \frac{7}{8} = \frac{21}{24}.$$

4 Сравнение дробей

Теорема 4.1: как сравнивать дроби

Дроби с *одинаковыми* знаменателями сравнивают по числителям: больше та, у которой числитель больше.

Дроби с *разными* знаменателями приводят к общему знаменателю и сравнивают числители. Для $b, d > 0$ равносильное правило «крест-накрест»:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff a \cdot d > c \cdot b.$$

Доказательство. Приведём дроби к общему знаменателю $bd > 0$. Тогда $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ и $\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}$. Знаки у дробей с общим положительным знаменателем определяются числителями, поэтому $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff ad > cb$. $\square$

Пример 4.2

Сравним $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{7}$ «крест-накрест»: $3 \cdot 7 = 21$, $5 \cdot 4 = 20$. Так как $21 > 20$,

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{7}.$$

А для $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{8}$ общий знаменатель 24:

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24} < \frac{21}{24} = \frac{7}{8}.$$

Замечание

Полезные ориентиры при сравнении:

- правильная дробь $< 1 \leq$ неправильная;
- с числом $\frac{1}{2}$: дробь больше $\frac{1}{2}$, если $2a > b$;
- если у дробей одинаковые числители, то больше та, у которой *меньше* знаменатель (при $a > 0$): $\frac{a}{b} > \frac{a}{d}$ при $0 < b < d$.

5 Действия с обыкновенными дробями

Теорема 5.1: правила действий

Для дробей (и смешанных чисел) верны правила:

$$\begin{aligned} \text{сложение/вычитание: } \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} &= \frac{a \pm c}{b}, & \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{ad \pm cb}{bd}; \\ \text{умножение: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd}; \\ \text{деление: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} & (c \neq 0). \end{aligned}$$

Смешанное число сначала записывают неправильной дробью.

Замечание

Общий знаменатель нужен только для сложения и вычитания. При умножении перемножают числители и знаменатели, при делении – «переворачивают» делитель и умножают. Результат всегда сокращают.

Пример 5.2

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{1}{4} &= \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}, \\ \frac{7}{8} - \frac{5}{6} &= \frac{21}{24} - \frac{20}{24} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Пример 5.3

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3},$$

$$2\frac{1}{2} : \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{20}{10} = 2.$$

6 Часть от целого и целое по его части

Определение 6.1: две обратные задачи

Часть от целого. Чтобы найти $\frac{a}{b}$ от числа N , это число умножают на дробь:

$$N \cdot \frac{a}{b}.$$

Целое по его части. Если известно, что $\frac{a}{b}$ числа равны M , то само число находят делением:

$$N = M : \frac{a}{b} = M \cdot \frac{b}{a}.$$

Замечание

Обе задачи – про одно и то же равенство $\frac{a}{b} \cdot N = M$: в первой известны $\frac{a}{b}$ и N (ищем M), во второй известны $\frac{a}{b}$ и M (ищем N). Проценты – частный случай, когда знаменатель равен 100 (см. раздел про проценты).

Пример 6.2

Найдём $\frac{3}{5}$ от числа 40:

$$40 \cdot \frac{3}{5} = 24.$$

Обратно, если $\frac{3}{5}$ числа равны 12, то число равно

$$12 : \frac{3}{5} = 12 \cdot \frac{5}{3} = 20.$$

Ещё пример: $\frac{2}{7}$ числа равны 8, значит число равно

$$8 \cdot \frac{7}{2} = 28.$$

7 Десятичная дробь

Определение 7.1: десятичная дробь

Дробь со знаменателем 10, 100, 1000, ... записывают без знаменателя – **десятичной** записью: цифры после запятой обозначают десятые, сотые, тысячные доли и т. д.

$$3,14 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} = \frac{314}{100}.$$

Здесь 3 – целая часть, 14 – дробная часть: 1 – разряд десятых, 4 – разряд сотых.

Пример 7.2

Десятая, сотая и тысячная доли – в десятичной записи:

$$\frac{7}{10} = 0,7, \quad \frac{7}{100} = 0,07, \quad \frac{7}{1000} = 0,007.$$

Обратно, десятичную дробь запишем обыкновенной:

$$2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}, \quad 0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

Теорема 7.3: сравнение десятичных дробей

Десятичные дроби сравнивают по разрядам слева направо, как целые числа. Перед сравнением удобно уравнивать число цифр после запятой, приписав справа нули: $0,3 = 0,30 = 0,300$.

Пример 7.4

0,3 и 0,29: припишем нуль – $0,30 > 0,29$, значит $0,3 > 0,29$.
5,4 и 5,400: это одно и то же число ($5,4 = 5,400$).

8 Действия с десятичными дробями

Теорема 8.1: правила действий

Сложение и вычитание. Уравнивают число знаков после запятой и записывают числа «в столбик» так, чтобы запятая стояла под запятой; далее действуют как с целыми числами, запятую ставят в результате на своём месте.

Умножение. Перемножают числа, не глядя на запятые, а затем в произведении отделяют справа столько знаков, сколько их суммарно после запятой во множителях.

Деление. Переносят запятую в делимом и делителе на столько знаков, чтобы делитель стал целым, и делят.

Умножение и деление на 10, 100, 1000, ... – это перенос запятой: вправо на число нулей при умножении и влево – при делении.

Пример 8.2

$0,3 + 0,29 = 0,30 + 0,29 = 0,59$; $5,4 - 1,37 = 5,40 - 1,37 = 4,03$.
 $1,2 \cdot 0,5 = 0,60 = 0,6$ (после запятой два знака – два знака отделяем).
 $2,4 : 0,3 = 24 : 3 = 8$ (перенесли запятую на один знак).
 $3,7 \cdot 100 = 370$; $370 : 1000 = 0,37$.

9 Из обыкновенной дроби в десятичную и обратно

Определение 9.1: перевод дробей

Десятичная $\rightarrow$ обыкновенная. Записывают дробь со знаменателем 10, 100, 1000, ... и сокращают:

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

Обыкновенная $\rightarrow$ десятичная. Делят числитель на знаменатель:

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75.$$

Теорема 9.2: когда дробь конечная

Несократимая дробь $\frac{a}{b}$ записывается *конечной* десятичной дробью тогда и только тогда, когда её знаменатель содержит только простые множители 2 и 5:

$$b = 2^m \cdot 5^n \quad (m, n \geq 0).$$

Доказательство. Если $b = 2^m 5^n$, домножим числитель и знаменатель на недостающие множители, чтобы в знаменателе получилась степень десяти: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 2^n 5^m}{10^{m+n}}$ – это конечная десятичная дробь.

Обратно, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{10^k}$, то $b \cdot c = a \cdot 10^k = a \cdot 2^k 5^k$. Раз дробь несократима, все простые множители числа b делят правую часть, а там, кроме множителей числа a , есть лишь 2 и 5. Значит, и в b других простых множителей нет. $\square$

Пример 9.3

Из десятичной в обыкновенную:

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}, \quad 0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

Из обыкновенной в десятичную:

$$\frac{3}{4} = 0,75 \quad (4 = 2^2), \quad \frac{7}{20} = 0,35 \quad (20 = 2^2 \cdot 5).$$

Бесконечные десятичные дроби

Если у несократимой дроби в знаменателе есть простые множители, отличные от 2 и 5 (например, 3), конечной десятичной дроби не получится: $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ – запись *бесконечная*. Такие дроби (бесконечные десятичные, периодические) относятся к теме 1.4 «Действительные числа».

10 Проценты

Определение 10.1: процент

Один процент (1%) – это сотая доля, то есть $\frac{1}{100}$. Значит,

$$p\% = \frac{p}{100}.$$

Теорема 10.2: три задачи на проценты

Процент от числа:

$$N \cdot \frac{p}{100}.$$

Число по его проценту: если $p\%$ числа равны M , то

$$N = M : \frac{p}{100} = \frac{100 M}{p}.$$

Процентное отношение: какую часть M составляет от N ,

$$\frac{M}{N} \cdot 100\%.$$

Пример 10.3

15% от числа 240:

$$240 \cdot \frac{15}{100} = 36.$$

Обратно, если 15% числа равны 36, то число равно

$$\frac{100 \cdot 36}{15} = 240.$$

Какой процент составляет 36 от 240:

$$\frac{36}{240} \cdot 100\% = 15\%.$$

Пример 10.4

Больше 100%. Проценты больше 100% – это больше целого числа:

$$150\% \text{ от } 60 = 60 \cdot 1,5 = 90, \quad 200\% \text{ от } 60 = 60 \cdot 2 = 120.$$

Увеличение на $p\%$. Прежнее число умножают на $1 + \frac{p}{100}$. Пусть было 200:

$$\text{больше на } 20\% : \quad 200 \cdot 1,2 = 240;$$

$$\text{больше на } 100\% : \quad 200 \cdot 2 = 400 \text{ (вдвое);}$$

$$\text{больше на } 300\% : \quad 200 \cdot 4 = 800 \text{ (вчетверо).}$$

Уменьшение на $p\%$. Наоборот, число умножают на $1 - \frac{p}{100}$. Уменьшим на 25%:

$$200 \cdot 0,75 = 150 \quad (\text{осталось } 75\% \text{ прежнего}).$$

Полезно помнить

Наиболее частые дроби и их проценты:

$$\frac{1}{2} = 50\%, \quad \frac{1}{4} = 25\%, \quad \frac{3}{4} = 75\%, \quad \frac{1}{5} = 20\%, \quad \frac{1}{10} = 10\%, \quad \frac{1}{8} = 12,5\%.$$