

Натуральные числа

Конспект по теме 1.1 (ОГЭ, математика, 9 класс)

11.10.2026

Определения

Теоремы

Примеры

1 Обозначения

Обозначение	Чтение	Значение
$\mathbb{N}$	«эн»	натуральные числа: $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	«эн с нулём»	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	«зэт»	целые числа: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (натуральные, ноль и числа со знаком минус)
a^n	« a в степени n »	$a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n раз); a – основание, n – показатель
$b \mid a$	« b делит a »	основное обозначение: $a = bk$ для целого k ($b \neq 0$)
$a : b$	« a делится на b »	то же самое, что $b \mid a$ (реже; «три точки вниз»)
$b \nmid a$	« b не делит a »	a не делится на b
$a \operatorname{div} b$	« $a \operatorname{div} b$ »	<i>неполное частное</i> при делении с остатком
$a \bmod b$	« $a \bmod b$ »	<i>остаток</i> при делении a на b
$a = bq + r$		запись деления с остатком: $0 \leq r < b$; $q = a \operatorname{div} b$, $r = a \bmod b$
$a \equiv b \pmod{m}$	« a сравнимо с b по модулю m »	$a - b$ делится на m (у a и b одинаковые остатки)
$\operatorname{НОД}(a, b)$	«НОД»	наибольший общий делитель; $\operatorname{НОД}(a, b) = 1$ – числа взаимно просты
$\operatorname{НОК}(a, b)$	«НОК»	наименьшее общее кратное
$\sum$	«сумма»	$\sum_{i=1}^k a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_k$
$\prod$	«произведение»	$\prod_{i=1}^k a_i = a_1 a_2 \dots a_k$

Замечание

Например, $7 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ и $-5 \in \mathbb{Z}$. Запись $4 \mid 20$ читаем «4 делит 20» (реже пишут $20 : 4$ – «20 делится на 4»); это одно и то же утверждение: $20 = 4 \cdot 5$.

2 Натуральные и целые числа

Определение 2.1

Натуральные числа – числа, которыми считают предметы: $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ Их множество обозначают $\mathbb{N}$. **Целые числа** – это натуральные числа, число 0 и числа, противоположные натуральным: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Их множество обозначают $\mathbb{Z}$.

Замечание

Числа $1, 2, 3, \dots$ называют положительными, а $-1, -2, -3, \dots$ – отрицательными. Число 0 не является ни положительным, ни отрицательным.

3 Запись чисел

Определение 3.1: десятичная запись

В десятичной системе счисления (иначе – **арабская запись** числа) число записывают цифрами $0, 1, \dots, 9$, которые занимают разряды (единицы, десятки, сотни, $\dots$). Число можно записать и как последовательность цифр, и как сумму разрядных слагаемых:

$$n = \overline{d_k d_{k-1} \dots d_1 d_0} = d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + d_1 \cdot 10 + d_0.$$

Здесь d_i – цифра i -го разряда.

Младший разряд – разряд единиц: крайняя правая цифра записи числа (у числа $n = \overline{d_k \dots d_0}$ это d_0).

Старший разряд – высший разряд числа: крайняя левая цифра (у того же числа это d_k ; в обычной записи она не равна нулю).

Пример 3.2

$$3527 = 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7.$$

Младший разряд числа 3527 – цифра 7 (разряд единиц), старший – цифра 3 (разряд тысяч).

Определение 3.3: римская нумерация

Римская нумерация – непозиционная система. Цифры и их значения:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Правило: цифры складываются, но меньшая цифра перед большей вычитается: $IV = 4$, $IX = 9$, $XL = 40$, $XC = 90$, $CD = 400$, $CM = 900$.

Пример 3.4: Из римской записи в арабскую

Под каждой цифрой подпишем её значение, а ещё ниже – цветом отметим, что с ней делаем: «+» – цифру прибавляем, «-» – вычитаем (так бывает, когда следующая цифра больше).

X	I	V
10	1	5
+	-	+

$$XIV = +10 - 1 + 5 = 14.$$

M	C	M	X	C	I	V
1000	100	1000	10	100	1	5
+	-	+	-	+	-	+

$$MCMXCIV = 1000 - 100 + 1000 - 10 + 100 - 1 + 5 = 1994.$$

Пример 3.5: Из арабской записи в римскую

Раскладываем арабскую запись числа по разрядам и заменяем каждую часть римскими:

$$14 = 10 + 4 = X + IV = XIV,$$

$$1994 = 1000 + 900 + 90 + 4 = M + CM + XC + IV = MCMXCIV,$$

$$1987 = 1000 + 900 + 80 + 7 = M + CM + LXXX + VII = MCMLXXXVII.$$

4 Действия и степень

Теорема 4.1: свойства действий

Для любых натуральных (или целых) a, b, c верны законы:

$$\begin{aligned} \text{переместительный:} \quad & a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a; \\ \text{сочетательный:} \quad & (a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c); \\ \text{распределительный:} \quad & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \end{aligned}$$

Кроме того, $a \cdot 1 = a$ и $a \cdot 0 = 0$.

Определение 4.2: степень

Для $a \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ полагают

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \quad a^1 = a.$$

Пример 4.3

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32,$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27,$$

$$10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000.$$

Теорема 4.4: свойства степени

Для любых a, b и натуральных m, n :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m \geq n), \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

Кроме того, при $a \neq 0$: $a^0 = 1$.

Замечание

Все эти правила – просто свойства повторного умножения; удобно проверять их на числах, например $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5$.

5 Делимость

Определение 5.1: делимость

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, причём $b \neq 0$. Говорят, что a **делится на** b , если

$$a = b \cdot k$$

для некоторого целого k . Обозначают $b \mid a$ (« b делит a ») или $a \div b$ (« a делится на b »). Если такого k нет, пишут $b \nmid a$. Число $k = \frac{a}{b}$ называют *частным*, b – *делителем*, a – *кратным*.

Пример 5.2

$5 \mid 45$, так как $45 = 5 \cdot 9$; $(-6) \mid 48$, так как $48 = (-6) \cdot (-8)$; $7 \nmid 45$.

Замечание

Знак делителя не важен: $b \mid a$ равносильно $(-b) \mid a$. Поэтому чаще всего делители рассматривают среди натуральных чисел.

Лемма 5.3: свойства делимости

Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ (все делители отличны от нуля). Тогда:

- 1) если $c \mid a$ и $c \mid b$, то $c \mid (a + b)$;
- 2) если $c \mid a$ и $c \mid b$, то $c \mid (a - b)$;
- 3) если $c \mid b$ и $b \mid a$, то $c \mid a$;
- 4) если $c \mid a$, то $c \mid ab$ (при любом целом b);
- 5) если $c \mid a$ и $d \mid b$, то $cd \mid ab$.

Доказательство. Обозначим частные так, чтобы получить нужные равенства.

- 1) $a = ct, b = cn \Rightarrow a + b = c(m + n)$.
- 2) $a = ct, b = cn \Rightarrow a - b = c(m - n)$.
- 3) $b = cn, a = bt \Rightarrow a = c(mn)$.
- 4) $a = ct \Rightarrow ab = c(mb)$.
- 5) $a = ct, b = dn \Rightarrow ab = (cd)(mn)$.

□

Замечание

Свойства (1) и (2) коротко: *если каждое слагаемое делится на c , то и сумма (разность) делится на c* . Обратное неверно: $5 + 7 = 12$ делится на 3, но 5 и 7 на 3 не делятся.

6 Деление с остатком

Теорема 6.1: деление с остатком

Для любых $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}$ найдутся *единственные* $q \in \mathbb{N}_0$ и $r \in \mathbb{N}_0$ такие, что

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Число q называют **неполным частным** ($q = a \operatorname{div} b$), число r – **остатком** ($r = a \bmod b$).

Доказательство. Существование. Среди чисел $a, a - b, a - 2b, \dots$, не меньших нуля, выберем наименьшее: $r = a - bq$. Тогда $r \geq 0$. Если бы $r \geq b$, то $r - b = a - b(q + 1)$ тоже было бы неотрицательным и меньшим r – противоречие. Значит, $r < b$.

Единственность. Если $a = bq + r = bq' + r'$ с $0 \leq r, r' < b$, то $r' - r = b(q - q')$ делится на b . Но $|r' - r| < b$, а единственное число, кратное b и меньшее b по модулю, – это 0. Значит $r' = r$, а тогда и $q' = q$. $\square$

Пример 6.2

$17 = 5 \cdot 3 + 2$, поэтому $17 \operatorname{div} 5 = 3$ и $17 \bmod 5 = 2$.
 $100 = 7 \cdot 14 + 2$, поэтому $100 \operatorname{div} 7 = 14$ и $100 \bmod 7 = 2$.

Следствие 6.3

$b \mid a \iff a \bmod b = 0$ (число делится на b ровно тогда, когда остаток равен нулю).

Для целых чисел

Правило то же, только остаток берут неотрицательным:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Например, $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$, то есть $-17 \operatorname{div} 5 = -4$ и $-17 \bmod 5 = 3$.

7 Вычисления по модулю

Определение 7.1: сравнение по модулю

Числа a и b **сравнимы по модулю k** , если они дают одинаковые остатки при делении на k . Пишут $a \equiv b \pmod{k}$; равносильно тому, что $k \mid (a - b)$.

Теорема 7.2: сравнения можно складывать, вычитать и умножать

Если $a \equiv r \pmod{k}$ и $b \equiv q \pmod{k}$, то

$$a + b \equiv r + q \pmod{k}, \quad a - b \equiv r - q \pmod{k}, \quad ab \equiv rq \pmod{k}.$$

Доказательство. По условию $a - r$ и $b - q$ делятся на k . Тогда

$$(a + b) - (r + q) = (a - r) + (b - q), \quad (a - b) - (r - q) = (a - r) - (b - q).$$

Для произведения прибавим и вычтем rb (от этого сумма не изменится):

$$ab - rq = ab - \underline{rb + rb} + rb - rq = (a - r)b + r(b - q).$$

Каждая из получившихся разностей делится на k (сумма и произведение чисел, делящихся на k). $\square$

Следствие 7.3

При вычислении остатка любое число можно заменять его остатком по модулю k .

Пример 7.4

Найдём остаток от деления 2^{10} на 7. Так как $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$, то

$$2^{10} = 2 \cdot (2^3)^3 \equiv 2 \cdot 1^3 = 2 \pmod{7},$$

значит $2^{10} \bmod 7 = 2$.

Замечание

Модуль 10 даёт последнюю цифру числа, модуль 9 – с точностью до остатка его сумму цифр. На этом основаны признаки делимости из следующего раздела.

8 Признаки делимости

Теорема 8.1: делимость на 10, 5, 2

Пусть d_0 – последняя цифра числа n . Тогда

$$10 \mid n \iff d_0 = 0; \quad 5 \mid n \iff d_0 \in \{0, 5\}; \quad 2 \mid n \iff d_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Доказательство. Запишем $n = 10q + d_0$, где d_0 – последняя цифра. Слагаемое $10q$ делится и на 10, и на 5, и на 2, значит, n даёт такой же остаток, как и цифра d_0 : $10 \mid n \iff d_0 = 0$; $5 \mid n \iff 5 \mid d_0 \iff d_0 \in \{0, 5\}$; $2 \mid n \iff 2 \mid d_0$. $\square$

Пример 8.2

Всё решает последняя цифра d_0 .

3570: $d_0 = 0$ – делится на 2, на 5 и на 10.

2345: $d_0 = 5$ – делится на 5, но не на 2 и не на 10.

1234: $d_0 = 4$ – делится на 2, но не на 5 и не на 10.

Теорема 8.3: делимость на 9 и 3

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9; число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Доказательство. Пусть $n = \overline{d_k \dots d_0} = \sum d_i 10^i$, а $S = \sum d_i$ – сумма цифр. Так как $10 \equiv 1 \pmod{9}$, то каждое $10^i \equiv 1$, и потому $n \equiv \sum d_i = S \pmod{9}$. Значит, n и S дают одинаковый остаток при делении на 9 (и на 3, так как 9 делится на 3). Отсюда и следует утверждение. $\square$

Пример 8.4

1233: сумма цифр $1 + 2 + 3 + 3 = 9$ делится на 9, значит $9 \mid 1233$. 141: сумма цифр 6 делится на 3, но не на 9, поэтому $3 \mid 141$, но $9 \nmid 141$.

Теорема 8.5: делимость на 11

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность

$$(\text{сумма цифр на чётных местах}) - (\text{сумма цифр на нечётных местах})$$

делится на 11 (места считаем от конца числа, **начиная с нуля**: место 0 – разряд единиц).

Доказательство. Так как $10 \equiv -1 \pmod{11}$, каждое 10^i даёт остаток $(-1)^i$, поэтому

$$n = \overline{d_k \dots d_0} = \sum d_i 10^i \equiv d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \dots \pmod{11}.$$

Справа стоит в точности разность сумм цифр на чётных и нечётных местах: чётные места идут со знаком «+», нечётные – со знаком «−». Значит, n делится на 11 ровно тогда, когда эта разность делится на 11. $\square$

Пример 8.6

Места считаем **от конца числа**, начиная с нуля: место 0 – последняя цифра (разряд единиц). **Красные** цифры стоят на чётных местах, **синие** – на нечётных; складываем цифры

одного цвета, а затем вычитаем суммы.

7 9 5 8 3 6 1 4

79583614: **чётные места** $4 + 6 + 8 + 9 = 27$, **нечётные** $1 + 3 + 5 + 7 = 16$; разность $27 - 16 = 11$ делится на 11, значит $11 \mid 79583614$ ($79583614 = 11 \cdot 7234874$).

2728: **чётные места** $8 + 7 = 15$, **нечётные** $2 + 2 = 4$; разность $15 - 4 = 11$ делится на 11, значит $11 \mid 2728$ ($2728 = 11 \cdot 248$).

1234: **чётные места** $4 + 2 = 6$, **нечётные** $3 + 1 = 4$; разность $6 - 4 = 2$ на 11 не делится, поэтому $11 \nmid 1234$.

Теорема 8.7: делимость на 4

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число из двух его последних цифр делится на 4.

Доказательство. Запишем $n = 100q + r$, где r – число из двух последних цифр ($0 \leq r < 100$). Так как $100 \equiv 0 \pmod{4}$, то $n \equiv r \pmod{4}$. Значит, $4 \mid n \iff 4 \mid r$. $\square$

Замечание

Тем же приёмом: на 25 число делится по двум последним цифрам (они должны быть 00, 25, 50 или 75), а на 8 – по трём последним цифрам (ведь $1000 \equiv 0 \pmod{8}$).

Пример 8.8

2024: две последние цифры 24 делятся на 4, значит $4 \mid 2024$ ($2024 = 4 \cdot 506$).

1234: 34 на 4 не делится ($34 = 4 \cdot 8 + 2$), значит $4 \nmid 1234$.

Следствие 8.9: остатки

Попутно мы получили и сами остатки: $n \bmod 10$ – это последняя цифра; $n \bmod 9$ и $n \bmod 3$ равны остаткам суммы цифр; $n \bmod 11$ равен остатку разности сумм цифр по чётности мест; $n \bmod 4$ – остаток числа из двух последних цифр.

9 Простые и составные числа

Определение 9.1

Делители, которые есть у любого числа, – 1 и само число, – называют **тривиальными**; остальные делители (если они есть) – **нетривиальными**.

Натуральное число $p > 1$ называется **простым**, если у него нет нетривиальных делителей (то есть оно делится только на 1 и на себя).

Натуральное число $a > 1$ называется **составным**, если у него есть нетривиальный делитель d (то есть $1 < d < a$). Число 1 не является ни простым, ни составным.

Пример 9.2

Простые числа до 100 – **зелёные**, составные – **красные**; число 1 не является ни простым, ни составным.

Почему так? Простое число делится только на 1 и на себя (таковы 2, 3, 5, 7, ...). А составное раскладывается на меньшие множители: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3 \cdot 3$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Пример 9.3

Разберём число 24. Найдём все его делители, выписывая парами:

$$1 \cdot 24, \quad 2 \cdot 12, \quad 3 \cdot 8, \quad 4 \cdot 6.$$

Значит, все делители 24 – это

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$$

Тривиальные из них – только 1 и 24; все остальные (2, 3, 4, 6, 8, 12) – **нетривиальные**. Раз нетривиальные делители есть, число 24 составное.

Замечание

Делители всегда идут парами: если d делит n , то и n/d делит n . Поэтому, выписав делители до $\sqrt{n}$, остальные получаем как их пары (у 24 делители до $\sqrt{24} \approx 4,9$ – это 1, 2, 3, 4, а пары к ним – 24, 12, 8, 6). Значит, всего делителей у числа n не может быть больше $2\sqrt{n}$.

Теорема 9.4: критерий простоты

Число $n > 1$ простое тогда и только тогда, когда оно не делится ни на одно простое число p с условием $p^2 \leq n$ (то есть $p \leq \sqrt{n}$).

Доказательство. Если n простое, то нетривиальных делителей у него нет, и делиться на такие p оно не может.

Обратно, пусть n не делится ни на одно простое $p \leq \sqrt{n}$, а само n – составное. Тогда $n = ab$, где $1 < a \leq b$. Из $a \leq b$ следует $a^2 \leq ab = n$, значит $a \leq \sqrt{n}$. Возьмём любой простой делитель числа a (он есть: у числа, большего 1, наименьший делитель, больший 1, прост). Пусть это p ; тогда $p \leq a \leq \sqrt{n}$, то есть $p^2 \leq n$, и $p \mid a \mid n$ – противоречие. $\square$

Пример 9.5

Проверим на простоту число 97. Так как $\sqrt{97} \approx 9,8$, достаточно проверить только простые до 9: это 2, 3, 5, 7. Число 97 не делится ни на одно из них, значит 97 – простое.

А вот 91: те же простые, и $91 = 7 \cdot 13$ – делится на 7, поэтому 91 составное.

Теорема 9.6: Евклид

Простых чисел бесконечно много.

Доказательство. От противного. Пусть все простые числа – это $p_1, p_2, \dots, p_k$. Рассмотрим $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$. Число $N > 1$, поэтому у него есть простой делитель p . Если бы p совпадало с каким-то p_i , то p делило бы и произведение $p_1 \cdots p_k$, и N , а значит, и их разность $N - p_1 \cdots p_k = 1$ – невозможно. Значит, p – новое простое число, не входящее в список. Противоречие. $\square$

Теорема 9.7: разложение на простые множители

Всякое натуральное число $n > 1$ можно разложить в произведение простых чисел, причём единственным способом (с точностью до порядка множителей):

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1 < \cdots < p_k$ – простые, а α_i – натуральные показатели.

Пример 9.8

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5; \quad 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

10 НОД и НОК

Определение 10.1

Общий делитель чисел a и b – число, делящее и a , и b .

НОД $\text{НОД}(a, b)$ – наибольший из общих делителей.

Общее кратное – число, кратное и a , и b .

НОК $\text{НОК}(a, b)$ – наименьшее из общих кратных.

Определение 10.2

Если у чисел a и b нет общих делителей, кроме 1 (то есть $\text{НОД}(a, b) = 1$), их называют **взаимно простыми**.

Если $a = 0$ или $b = 0$

Число 0 делится на любое натуральное d , ведь $0 = d \cdot 0$. Поэтому

$$\text{НОД}(0, b) = b \quad (b > 0), \quad \text{НОК}(0, b) = 0.$$

Формула $\text{НОД} \cdot \text{НОК} = ab$ при этом тоже верна ($b \cdot 0 = 0 = 0 \cdot b$). Случай $a = b = 0$ не рассматривают: общих делителей у двух нулей бесконечно много, и наибольшего среди них нет.

Пример 10.3

$$\text{НОД}(12, 18) = 6; \quad \text{НОК}(12, 18) = 36; \quad \text{НОД}(14, 15) = 1 \text{ (взаимно просты)}.$$

Теорема 10.4: алгоритм Евклида

Если $a = bq + r$, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$. В частности,

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, a \bmod b).$$

Доказательство. Из равенства $a = bq + r$: любой общий делитель a и b делит $r = a - bq$; обратно, любой общий делитель b и r делит $a = bq + r$. Значит, у пар (a, b) и (b, r) одни и те же общие делители, а потому и один и тот же наибольший. $\square$

Как искать НОД

Повторяем замену $(a, b) \rightarrow (b, a \bmod b)$, пока остаток не станет нулём. Последний ненулевой остаток и есть НОД.

Пример 10.5

Найдём НОД(48, 18) алгоритмом Евклида:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(48, 18) &= \text{НОД}(18, 48 \bmod 18) = \text{НОД}(18, 12) \\ &= \text{НОД}(12, 18 \bmod 12) = \text{НОД}(12, 6) \\ &= \text{НОД}(6, 12 \bmod 6) = \text{НОД}(6, 0) = 6.\end{aligned}$$

Теорема 10.6: связь НОД и НОК

Для любых натуральных a и b

$$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b.$$

Доказательство. Разложим a и b на простые: $a = \prod p^{\alpha_p}$, $b = \prod p^{\beta_p}$. Тогда $\text{НОД}(a, b) = \prod p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}$ и $\text{НОК}(a, b) = \prod p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$. Для каждой простой p сумма $\min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$, поэтому произведение НОД и НОК равно $\prod p^{\alpha_p + \beta_p} = ab$. $\square$

Пример 10.7

$$\text{НОД}(12, 18) \cdot \text{НОК}(12, 18) = 6 \cdot 36 = 216 = 12 \cdot 18.$$

Пример 10.8

Зачем нужны НОД и НОК, хорошо видно на дробях.

1. Сокращение дроби. Дробь $\frac{70}{105}$ можно упростить, разделив числитель и знаменатель на их общий делитель. Чтобы сразу получить *несократимую* дробь, делят на *наибольший* общий делитель. Найдём его алгоритмом Евклида:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(105, 70) &= \text{НОД}(70, 105 \bmod 70) = \text{НОД}(70, 35) \\ &= \text{НОД}(35, 70 \bmod 35) = \text{НОД}(35, 0) = 35.\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{70}{105} = \frac{70 : 35}{105 : 35} = \frac{2}{3}.$$

2. Сложение дробей. Чтобы сложить $\frac{1}{70} + \frac{1}{105}$, нужен общий знаменатель; *наименьший* из возможных – это НОК. Найдём его через НОД (по формуле $\text{НОД} \cdot \text{НОК} = ab$):

$$\text{НОК}(70, 105) = \frac{70 \cdot 105}{\text{НОД}(70, 105)} = \frac{7350}{35} = 210.$$

Приводим дроби к знаменателю 210 и складываем:

$$\frac{1}{70} + \frac{1}{105} = \frac{3}{210} + \frac{2}{210} = \frac{5}{210}.$$

Полученную дробь снова сокращаем – и опять через НОД ($\text{НОД}(5, 210) = 5$):

$$\frac{5}{210} = \frac{5 : 5}{210 : 5} = \frac{1}{42}.$$

11 Дополнительно: составные признаки делимости

Теорема 11.1: составные признаки

Пусть $a = b \cdot c$, где числа b и c *взаимно просты*. Тогда

$$a \mid n \iff b \mid n \text{ и } c \mid n.$$

Доказательство. Если $a \mid n$, то и $b \mid n$, и $c \mid n$ (так как b и c – делители a). Обратно, пусть $b \mid n$ и $c \mid n$. В разложение n на простые множители входят все простые множители чисел b и c ; так как числа взаимно просты, эти множители не пересекаются, и произведение $bc = a$ тоже делит n . $\square$

Пример 11.2

$15 = 3 \cdot 5$, а числа 3 и 5 взаимно просты, поэтому $15 \mid n \iff 3 \mid n \text{ и } 5 \mid n$.

1230: сумма цифр 6 делится на 3, последняя цифра 0 – делится на 5; значит $15 \mid 1230$ ($1230 = 15 \cdot 82$).

6001: сумма цифр 7 на 3 не делится, поэтому $15 \nmid 6001$.

Замечание

Сомножители обязаны быть *взаимно простыми*. «Делится и на 4, и на 6» ещё не означает «делится на 24»: число 12 делится на 4 и на 6, но на 24 – нет.